DETERMINANTES

Ejercicio nº 1.-

Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve la ecuación propuesta en a) y calcula el valor del determinante propuesto en b):

a) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 3.-

a) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº4.-

Hallar los valores de t que anulan el primer determinante, y calcula cuánto vale el segundo determinante:

a) $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 5.-

Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado a), calcula, además, los posibles valores de t para que el determinante sea cero:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 6.-

Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-c)$$

Ejercicio nº 7.-

Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 8.-

Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 9.-

Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio nº 10.-

Halla en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 11.-

a) Justifica cuáles de las siguientes igualdades son correctas y cuales no:

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

b) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 12.-

Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2}+p & \frac{b}{2}+q & \frac{c}{2}+r \\ p & q & r \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3x & 3a & 3p \\ 3y & 3b & 3q \\ 3z & 3c & 3r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 13.-

a) Si A y B son dos matrices 2×2, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcula, justificando la respuesta:

$$|A^2|; \quad |-A|; \quad |2A|; \quad |AB^t|; \quad |B^t A|; \quad |A^{-1}|$$

(B^t representa la traspuesta de la matriz B)

b) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$, calcula $\begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{vmatrix}$.

Ejercicio nº 14.-

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$, **halla el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix}$

Ejercicio nº 15.-

Indica, razonando tus respuestas, si son ciertas o no las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicio nº 16.-

Halla el rango de la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 17.-

Averigua cuál es el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 18.-

Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 19.-

Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 20.-

Obtén el rango de esta matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 21.-

Determina cuál es el rango de la matriz *A*, según los valores de λ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 22.-

Estudia el rango de la matriz *M* según los valores de *t:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8 - 3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 23.-

Estudia el rango de esta matriz, según los valores de *t*:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 24.-

Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 25.-

Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN EJERCICIOS DETERMINANTES

Ejercicio nº 1.-

Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - (1-x) - (1-x) = (1-x)^3 - 2(1-x) = (1-x)\left[(1-x)^2 - 2\right] =$$

$$= (1-x)\left[1 - 2x + x^2 - 2\right] = (1-x)\left(x^2 - 2x - 1\right) = -x^3 + 3x^2 - x - 1$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 4^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 2 \cdot 4^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 13 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ -5 & 13 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{\text{a}} - 3 \cdot 2^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} -5 & 13 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -11 & 23 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} -5 & 13 \\ -11 & 23 \end{vmatrix} = -(-115 + 143) = -28$$

(1) Desarrollamos por la 4ª columna.
(2) Desarrollamos por la 3ª columna.

Ejercicio nº 2.-

Resuelve la ecuación propuesta en a) y calcula el valor del determinante propuesto en b):

a) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{COLUMNAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

(1) Desarrollamos por la 2ª columna.

Hay dos soluciones: $a_1 = -1;\ a_2 = 1$

b) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} 1^{a}-2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 5 = -10$$

(1) Desarrollamos por la 2ª columna.
(2) Desarrollamos por la 1ª fila.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}-2^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\text{a}} + 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 3^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4(12-2) = 4 \cdot 10 = 40$$

(1) Desarrollamos por la 3ª columna.
(2) Sumamos la 3ª fila a la 2ª.
(3) Desarrollamos por la 2ª fila.

<u>Ejercicio nº4.-</u>

Hallar los valores de t que anulan el primer determinante, y calcula cuánto vale el segundo determinante:

a) $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 2 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay tres soluciones: $t_1 = 0$; $t_2 = -\sqrt{2}$; $t_3 = \sqrt{2}$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ = \; 2^a - 1^a \\ 3^a + 2\cdot 1^a \end{array} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 11 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 8 = 19$$

(1) Desarrollamos por la 4ª columna.
(2) Desarrollamos por la 2ª columna.

Ejercicio nº 5.-

Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado a), calcula, además, los posibles valores de t para que el determinante sea cero:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4(1-t) - 2t(1-t) - t = t^2 + 4 - 4t - 2t + 2t^2 - t = 3t^2 - 7t + 4$$

Veamos para que valores de t se anula el determinante:

$$3t^2 - 7t + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} \begin{cases} t = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

El determinante vale cero cuando $t = \frac{4}{3}$ y cuando $t = 1$.

b) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a - 2\cdot 4^a \\ 2^a - 4^a \\ = \; 3^a + 4^a \\ 4^a \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} -6 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -6(-6+7) = -6$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.
(2) Sumamos a la 1ª fila la 3ª.
(3) Desarrollamos por la 1ª fila.

Ejercicio nº 6.-

Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} a\,(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} a\,(b-a) \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} a\,(b-a)(c-b)(d-c)$$

(1) Restamos la 1ª fila a las otras tres.
(2) Desarrollamos por la 1ª columna.
(3) Sacamos (*b* – *a*) factor común.
(4) Restamos a la 3ª fila la 2ª y a la 2ª la 1ª.
(5) Es el determinante de una matriz triangular.

Ejercicio nº 7.-

Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 1 \\ a+2 & a & 1 & 0 \\ a+2 & 1 & a & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} (a+2) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (a+2)\,a \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)\,a\left[(a-1)^2-1\right] = (a+2)\,a\,(a^2-2a) =$$

$$= (a+2)a^2(a-2) = a^2(a+2)(a-2)$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.
(2) Sacamos $(a+2)$ factor común.
(3) Restamos la 1ª columna a la 2ª y a la 4ª.
(4) Desarrollamos por la 1ª fila.
(5) Desarrollamos por la 2ª fila.

Ejercicio nº 8.-

Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} \text{FILAS} \\ 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \end{array} = (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)\cdot(x-a)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las otras tres.
(2) Sacamos $(x+3a)$ factor común.
(3) Es el determinante de una matriz triangular.

Ejercicio nº 9.-

Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-b-c} & \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{2b} & \boldsymbol{b-c-a} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{2c} & \boldsymbol{c-a-b} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a+b+c})^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^{a} \\ = 2^{a}-1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}(a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c)=(a+b+c)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª fila las otras dos.
(2) Sacamos $(a+b+c)$ factor común.
(3) Es el determinante de una matriz triangular.

Ejercicio nº 10.-

Halla en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^{a} \\ 2^{a}+1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -(a+1)\begin{vmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=}(a+1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3-1+a-a) = (a+1)(a^3-1)$$

(1) Desarrollamos por la 2ª fila.
(2) Sacamos –1 factor común.

Ejercicio nº 11.-

a) Justifica cuáles de las siguientes igualdades son correctas y cuales no:

$$\begin{vmatrix} \alpha \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \alpha \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \alpha \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha \boldsymbol{a} & \alpha \boldsymbol{b} \\ \alpha \boldsymbol{c} & \alpha \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \alpha^2 \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

b) Si $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{2a+2b} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{2c+2d} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad - bc) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow$ VERDADERA

$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 ad - bc \neq \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha^2(ad - bc) \rightarrow$ FALSA

$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 ad - \alpha^2 bc = \alpha^2(ad - bc) = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow$ VERDADERA

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 3 = 6$$

(1) El segundo determinante es 0 por tener las dos columnas proporcionales.

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2}+p & \frac{b}{2}+q & \frac{c}{2}+r \\ p & q & r \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3x & 3a & 3p \\ 3y & 3b & 3q \\ 3z & 3c & 3r \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2}+p & \frac{b}{2}+q & \frac{c}{2}+r \\ p & q & r \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{\underset{\begin{array}{c}1^{a}\\ 2^{a}-3^{a}\\ 3^{a}\end{array}}{=}} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Por tanto, es verdadera la igualdad.

b) Falsa, ya que:

$$\begin{vmatrix} 3x & 3a & 3p \\ 3y & 3b & 3q \\ 3z & 3c & 3r \end{vmatrix} = 3^3 \begin{vmatrix} x & a & p \\ y & b & q \\ z & c & r \end{vmatrix} = 3^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 13.-

a) Si A y B son dos matrices 2×2, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcula, justificando la respuesta:

$$\left|A^2\right|; \quad |-A|; \quad |2A|; \quad \left|AB^t\right|; \quad \left|B^t A\right|; \quad \left|A^{-1}\right|$$

$(B^t$ representa la traspuesta de la matriz $B)$

b) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$, calcula $\begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{vmatrix}$.

Solución:

a) Vamos a tener en cuenta estas tres igualdades, que demostraremos al final:

Consideramos A y B dos matrices 2×2.

1) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$; 2) $|k\cdot A| = k^2\cdot|A|$; 3) $\left|A^t\right| = |A|$

Por tanto:

- $\left|A^2\right| = |A\cdot A| = |A|\cdot|A| = |A|^2 = 2^2 = 4$
- $|-A| = |(-1)\cdot A| = (-1)^2\cdot|A| = 1\cdot|A| = |A| = 2$
- $|2A| = 2^2\cdot|A| = 4\cdot|A| = 4\cdot 2 = 8$
- $\left|A\cdot B^t\right| = |A|\cdot\left|B^t\right| = |A|\cdot|B| = 2\cdot(-4) = -8$
- $\left|B^t\cdot A\right| = \left|B^t\right|\cdot|A| = |B|\cdot|A| = (-4)\cdot 2 = -8$
- Para hallar $\left|A^{-1}\right|$, vamos a tener en cuenta que $A\cdot A^{-1} = I$; y que existe A^{-1}, puesto que $|A| = 2 \neq 0$. Así:

$$\left|A\cdot A^{-1}\right| = |I| \quad \to \quad |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = 1 \quad \to \quad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

b) Sumamos a la 1ª columna la 2ª y sacamos 2 y (-1) factor común:

$$\begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) = 4$$

OBSERVACIÓN: Vamos a demostrar las tres igualdades utilizadas.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$:

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) =$$

$$= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} -$$

$$-a_{11}a_{21}b_{12}b_{11} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} =$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{22}b_{11} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= a_{11}a_{22}|B| - a_{12}a_{21}|B| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

2) $k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{22} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

$$|k \cdot A| = k^2 a_{11}a_{22} - k^2 a_{21}a_{22} = k^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}) = k^2|A|$$

3) $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow |A^t| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$

Ejercicio nº 14.-

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$**, halla el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix}$

Solución:

a) Restando a la 1ª fila la 3ª y sacamos (–2) factor común:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} (-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 = 8$$

(*) Al permutar la 2ª y 3ª filas de orden, el determinante cambia de signo.

b) Restamos a la 3ª columna la 2ª, y sacamos 3 factor común:

$$\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & 3p \\ b & y & 3q \\ c & z & 3r \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\cdot 4 = 12$$

(*) Tenemos en cuenta que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Indica, razonando tus respuestas, si son ciertas o no las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \mathbf{2}\boldsymbol{y} & \mathbf{2}\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{a}+\mathbf{2} & \boldsymbol{b}+\mathbf{2} & \boldsymbol{c}+\mathbf{2} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a}^{2} & \boldsymbol{a}^{3} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a}^{3} & \boldsymbol{a}^{4} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

Solución:

a) La 1ª fila la hemos multiplicado por 2 y la 2ª por $\frac{1}{2}$. A la 3ª le hemos sumado la 1ª.

Por tanto:

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$. La igualdad es cierta.

b) Observamos que la 2ª y la 3ª columna son proporcionales, puesto que la 3ª la obtenemos multiplicando la 2ª por *a*. Por tanto, el determinante es cero.

La igualdad es cierta.

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

Halla el rango de la matriz siguiente:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor no nulo de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(M\right) \geq 2$$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Las tres primeras filas son} \\ \text{linealmente independientes}\end{array} \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(M\right) \geq 3$$

Comprobamos si el determinante de M es distinto de cero o no:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 13 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

(1) Restamos a la 4ª columna, la 2ª multiplicada por 3.
(2) Desarrollamos por la 3ª fila.

Por tanto, $\text{ran}\ (M) = 4$

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Averigua cuál es el rango de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Luego, $\text{ran}\ (M) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Las tres primeras filas son} \\ \text{linealmente independientes}\end{array} \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(M\right) \geq 3$$

Comprobamos si el determinante de M es distinto de cero o no:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} + 1^{\underline{a}} \\ = \quad 3^{\underline{a}} + 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 2 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 10 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 10 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, ran (M) $= 3$.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Calcula el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por tanto, ran (A) ≥ 2. Las dos primeras líneas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las tres filas son linealmemente independientes.}$$

Luego, ran (A) $= 3$.

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Estudia el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{12} & \mathbf{-11} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, ran (A) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\text{pues, si restamos la } 1^{a} \text{ columna menos la } 2^{a}\text{, obtenemos la } 3^{a}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$ Así, la 3^{a} fila es combinación lineal de las dos primeras.

Comprobamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$ También la cuarta fila depende de las dos primeras.

Por tanto, $\text{ran}\,(A) = 2$.

Ejercicio nº 20.-

Obtén el rango de esta matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna coincide con la 1ª y que la 5ª es igual que la 3ª.

Por tanto, podemos prescindir de las dos últimas columnas para calcular el rango de M.

Así, $\text{ran}\,(M) \leq 3$.

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, $\text{ran}\,(M) \geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(M\right) = 3$$

<u>Ejercicio nº 21.-</u>

Determina cuál es el rango de la matriz *A*, según los valores de λ:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \lambda + \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \lambda & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \lambda + 1 & \boxed{1} \\ \lambda & \boxed{0} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Luego, ran (A) $\geq$ 2.

Buscamos los valores de λ que hacen cero el determinante formado por las columnas 2ª, 3ª y 4ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\left[2 - \lambda\left(\lambda + 1\right)\right] = -2\left[2 - \lambda^2 - \lambda\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\lambda^2 + \lambda - 2\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(A\right) = 3$
- Si $\lambda = 1 \quad \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(A\right) = 3$$

- Si $\lambda = -2 \quad \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\left(A\right) = 3$$

Por tanto, ran $(A) = 3$ para cualquier valor de λ.

Ejercicio nº 22.-

Estudia el rango de la matriz M según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8-3}\boldsymbol{t} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & t & 3 & \boxed{2} \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3ª columna es proporcional a la 1ª (es su triple), por tanto, podemos prescindir de ella para calcular el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Luego, ran $(M) \geq 2$.

Buscamos los valores de t que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 2ª y 4ª sea cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = -2t + 8 - 3t + 4 - t - 2(8-3t) + 4 = 0 \quad \text{para cualquier valor de } t.$$

Por tanto, la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras para cualquier valor de t.

Así, ran $(M) = 2$.

Ejercicio nº 23.-

Estudia el rango de esta matriz, según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{4} & 2 \\ \boxed{0} & t & \boxed{4} & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna es el doble de la 1ª. Luego, podemos prescindir de ella para obtener el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Así, ran (M) ≥ 2.

Buscamos los valores de t que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4t - 12 = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$$

- Si $t \neq 2$ y $t \neq -6$ $\rightarrow$ ran$(M) = 3$
- Si $t = 2$ o $t = -6$ $\rightarrow$ La 2ª columna depende linealmente de la 1ª y 3ª.

  Por tanto, ran (M) $= 2$.

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\boldsymbol{a} & \mathbf{5} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, ran (M) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier valor de a.

Buscamos los valores de a que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 3ª y 4ª sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 6 - 5a - 3a = 2a^2 - 8a + 6 = 2\left(a^2 - 4a + 3\right) = 0 \;\rightarrow\; a^2 - 4a + 3 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a = 1$ $\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depende linealmente de las dos últimas. Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \text{La 2ª columna depende linealmente de las dos últimas.}$$

Por tanto, ran (M) $= 2$.

- Si $a = 3$ $\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depende linealmente de las dos últimas. Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(M) = 3$$

Ejercicio nº 25.-

Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Solución:

Podemos prescindir de la 3ª columna, pues no influye en el rango.

Tomemos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Luego, ran (A) ≥ 2.

Buscamos los valores de a que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq -3$ $\rightarrow$ $\operatorname{ran}(A) = 3$

- Si $a = -1$ o $a = -3$ $\rightarrow$ La 2ª fila depende linealmente de las otras dos $\rightarrow$
  $\rightarrow$ ran (A) $= 2$